

## 1 Exercice

On considère les variables propositionnelles  $x, y, z$ .

1. Mettre les formules suivantes sous forme CNF :
  - (a)  $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)$
  - (b)  $\neg(x \vee y) \vee z$
2. Déterminer si chaque formule est satisfiable.
3. Appliquer l'algorithme de Quine à la formule

$$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z).$$

## 2 Exercice 2

On considère la formule

$$\varphi = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg z).$$

1. Donner la CNF associée.
2. Numéroter les variables propositionnelles.
3. Écrire le fichier DIMACS correspondant.
4. Préciser le nombre de variables et de clauses.

## 3 Exercice

On dispose de  $n$  objets et on souhaite en choisir exactement un.

1. Introduire des variables propositionnelles  $x_1, \dots, x_n$ .
2. Écrire une CNF exprimant qu'au moins un objet est choisi.
3. Écrire une CNF exprimant qu'au plus un objet est choisi.
4. En déduire la CNF complète.

## 4 Exercice

On considère une grille  $4 \times 4$  avec des valeurs dans  $\{1, 2, 3, 4\}$ . On définit les variables  $x_{r,c,k}$ .

1. Écrire une CNF exprimant que chaque case contient au moins une valeur.
2. Écrire une CNF exprimant que chaque case contient au plus une valeur.
3. Écrire une CNF exprimant que chaque ligne contient chaque valeur exactement une fois.
4. Écrire la clause correspondant à une valeur initialement imposée.

## 5 Exercice

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté et  $k$  couleurs.

1. Définir les variables propositionnelles nécessaires.
2. Écrire une CNF exprimant que chaque sommet a une couleur.
3. Écrire une CNF exprimant que deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur.
4. Donner l'écriture DIMACS pour un graphe à trois sommets.

## 6 Exercice

On considère la formule

$$\varphi = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \wedge \neg z.$$

1. Mettre  $\varphi$  sous forme CNF.
2. Appliquer l'algorithme de Quine étape par étape.
3. Conclure sur la satisfiabilité de  $\varphi$ .

## 7 Exercice

On considère l'algorithme :

```
quine_sat (subst x True f) || quine_sat (subst x False f).
```

1. Expliquer le rôle de l'opérateur `||`.
2. Justifier la correction de l'algorithme.
3. Donner un exemple illustrant le court-circuit.

## 8 Exercice

On considère les variables  $x_1, x_2, x_3$ .

1. Écrire une formule exprimant qu'au moins deux variables sont vraies.
2. Mettre la formule sous forme CNF.
3. Donner l'écriture DIMACS correspondante.

## 9 Exercice

On généralise le Sudoku à une grille  $n \times n$  avec  $n = d^2$ .

1. Donner le nombre total de variables propositionnelles.
2. Donner un majorant du nombre de clauses.
3. Montrer que la taille de la CNF est en  $O(n^4)$ .

---

## 10 Exercice

On suppose qu'un solveur SAT fournit une valuation satisfaisante pour un Sudoku.

1. Expliquer comment reconstruire la grille solution.
2. Justifier l'unicité de la solution.
3. Que se passe-t-il si plusieurs valuations satisfaisantes existent ?